



UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN
ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN**

NOR WAHIDA DERAMAN.

IPM 2007 1

**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN
ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN**

Oleh

NOR WAHIDA DERAMAN

**Tesis Ini Dikemukakan Kepada Sekolah Pengajian Siswazah,
Universiti Putra Malaysia, Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah
Master Sains**

Mac 2007



Salam kasih dan sayang buat

*Hj. Deraman B. Yusoff,
Hjh. Hamidah Bt. Mamat,*

Fadzlirahimi B. Ismail

Dan

Anis Sulwani Bt. Fadzlirahimi

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia
sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains

**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN
ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN**

Oleh

NOR WAHIDA DERAMAN

Mac 2007

Pengerusi : Profesor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institut : Penyelidikan Matematik

Katakan $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ suatu vektor dalam ruang Z^n dengan Z menandakan gelanggang integer dan katakan q integer positif dan f suatu polinomial dalam \underline{x} berpekali unsur dalam Z . Hasil tambah eksponen yang dihubungkan dengan f ditakrifkan sebagai, $S(f; q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(\underline{x})}{q}}$, dengan \underline{x} mengambil nilai dalam sistem reja terkecil modulo q .

Seperti yang telah ditunjukkan sebelum ini, kebanyakan anggaran adalah bersandar kepada suatu nilai malar yang dihubungkan dengan polinomial yang berkaitan secara tersirat. Penyelidikan ini tertumpu kepada mencari anggaran hasil tambah eksponen, $S(f; q)$ dengan $f(\underline{x})$ polinomial kuadratik dua, tiga dan empat pembolehubah berpekali dalam gelanggang integer p -

adic, Z_p . Pendekatan yang dilakukan ialah dengan meneliti dan menguji set penyelesaian Persamaan Diofantus Linear yang dihubungkan dengan terbitan separa $f(x)$. Daripada kajian yang kami lakukan, keputusan yang diperolehi adalah seperti berikut:

Pertama, katakan, $f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$. Biarkan, α suatu integer positif, $\theta = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$ dan $u_1 = \min\{\text{ord}_p(4ac-b^2), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p 2a, \text{ord}_p b\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p b, \text{ord}_p 2c\}$. Jika $N(f(x,y), p^\theta) \leq p^{u_1}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{2(\alpha-\theta)+u_1}.$$

Kedua, katakan, $f(x,y,z)=a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z + d$. Biarkan, $(2a_1b_2 - b_1b_3) = a_{11}$, $(b_1b_2 - 2a_2b_3) = a_{12}$, $(2a_3b_1 - b_2b_3) = a_{21}$, $(4a_2a_3 - b_2^2) = a_{22}$. Katakan, $u_2 \leq \min\{\text{ord}_p 2a_3, \text{ord}_p b_2, \text{ord}_p b_3\}$, $u_1 = \min\{\text{ord}_p (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p a_{11}, \text{ord}_p a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p a_{12}, \text{ord}_p a_{22}\}$. Jika $N(f(x,y,z), p^\theta) \leq p^{u_1+u_2}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}.$$

Ketiga, Katakan, $f(x,y,z,t) = a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz + b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e$. Biarkan, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$, $(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}$, $(2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}$, $(b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23}$, $(2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31}$, $(2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}$ dan, $(4a_3a_4 - b_6^2) = c_{33}$. Katakan, $(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11}$, $(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}$, $(c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21}$, $(c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}$. Biarkan, $u_3 \leq \min\{\text{ord}_p 2a_4, \text{ord}_p b_3, \text{ord}_p b_5, \text{ord}_p b_6\}$, $u_2 \leq \min\{\text{ord}_p c_{13}, \text{ord}_p c_{23}, \text{ord}_p c_{33}\}$ dan $u_1 = \min\{\text{ord}_p (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$, dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p a_{11}, \text{ord}_p a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p a_{12}, \text{ord}_p a_{22}\}$. Jika $N(f(x,y,z,t), p^\theta) \leq p^{u_1+u_2+u_3}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z,t)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}.$$

Abstract of thesis presented to Senate of Universiti Putra Malaysia in
fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science

**SOLUTION OF LINEAR DIOFANTUS EQUATION AND
EXPLICIT ESTIMATION OF EXPONENTIAL SUM**

By

NOR WAHIDA DERAMAN

March 2007

Chairman : Professor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institute : Mathematical Research

Let $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ be a vector in a space Z^n with Z the ring of integers
and let q be a positive integer and f a polynomial in \underline{x} with coefficients in Z .

The exponential sum associated with f is defined as, $S(f; q) =$

$\sum e^{\frac{2\pi i f(\underline{x})}{q}}$, where the sum is taken over a set of least residues modulo q .

As has been shown previously, most of these estimates depend on a
constant value that is related to the polynomial implicitly. This research
concentrates on finding estimates to the exponential sum, $S(f; q)$ where $f(\underline{x})$
are two, three and four variables quadratic polynomials with coefficients in
the ring of p -adic integers, Z_p . The approach is by observing and examining

the sets of solutions of Linear Diophantine Equation associated with partial derivatives of $f(\underline{x})$. In our work, we found that:

First, let, $f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$. Let α is the positive integer, $\theta = \left\lceil \frac{\alpha}{2} \right\rceil$ and $u_1 = \min \{ \text{ord}_p(4ac-b^2), \theta \}$ or $u_1 = l+k$ with, $l \leq \min \{ \text{ord}_p 2a, \text{ord}_p b \}$ and $k \leq \min \{ \text{ord}_p b, \text{ord}_p 2c \}$. If $N(f(x,y), p^\theta) \leq p^{u_1}$, then the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y)$ as follows:

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{2(\alpha-\theta)+u_1}.$$

Second, let, $f(x,y,z)=a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z + d$. Let, $(2a_1b_2 - b_1b_3) = a_{11}$, $(b_1b_2 - 2a_2b_3) = a_{12}$, $(2a_3b_1 - b_2b_3) = a_{21}$, $(4a_2a_3 - b_2^2) = a_{22}$. Let, $u_2 \leq \min \{ \text{ord}_p 2a_3, \text{ord}_p b_2, \text{ord}_p b_3 \}$, $u_1 = \min \{ \text{ord}_p (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}), \theta \}$ or $u_1 = l+k$ with, $l \leq \min \{ \text{ord}_p a_{11}, \text{ord}_p a_{21} \}$ and $k \leq \min \{ \text{ord}_p a_{12}, \text{ord}_p a_{22} \}$. If $N(f(x,y,z), p^\theta) \leq p^{u_1+u_2}$, then the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y,z)$ as follows:

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}.$$

Third, let, $f(x,y,z,t) = a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz + b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e$. Let, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$, $(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}$,

$(2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}, \quad (b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23}, \quad (2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31},$
 $(2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}, \quad (4a_3a_4 - b_6^2) = c_{33}.$ Let, $(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11},$
 $(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}, \quad (c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21}, \quad (c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}.$ Let, $u_3 \leq$
 $\min\{\text{ord}_p 2a_4, \text{ord}_p b_3, \text{ord}_p b_5, \text{ord}_p b_6\}, u_2 \leq \min\{\text{ord}_p c_{13}, \text{ord}_p c_{23}, \text{ord}_p c_{33}\}$
and $u_1 = \min\{\text{ord}_p (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ or $u_1 = l+k$, with $l \leq \min\{\text{ord}_p a_{11},$
 $\text{ord}_p a_{21}\}$ and $k \leq \min\{\text{ord}_p a_{12}, \text{ord}_p a_{22}\}.$ If $N(f(x,y,z,t), p^\theta) \leq p^{u_1+u_2+u_3},$ then
the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y,z,t)$
as follows:

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}.$$

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah lagi Maha Mengasihani. Kesyukuran yang tidak terhingga kehadiran Ilahi kerana dengan limpah kurnia-Nya dapat saya menyiapkan tesis ini.

Pertama sekali jutaan terima kasih diucapkan kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Prof. Dato' Dr. Hj. Kamel Ariffin Bin Mohd Atan di atas segala kesabaran, sokongan, bantuan, dorongan dan bimbingan beliau dapat saya menyiapkan tesis ini.

Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada Prof. Madya Dr. Mohamad Rushdan Bin Mohd Said dan Prof. Madya Dr. Bekbaev Ural Djumaevich kerana bantuan dan tunjukajar yang telah mereka berikan sepanjang saya menyelesaikan tesis ini.

Akhir kata, saya ingin merakamkan penghargaan buat ahli keluarga terutamanya ibu, ayah, suami dan anak kerana tidak jemu memberi dorongan dan semangat sehinggalah penulisan ini selesai.

Saya mengesahkan bahawa satu Jawatankuasa Pemeriksa telah berjumpa pada **21 Mac 2007** untuk menjalankan peperiksaan akhir bagi **Nor Wahida binti Deraman** untuk menilai tesis Master Sains beliau yang bertajuk **“Penyelesaian Persamaan Diofantus Linear dengan Anggaran Eksplisit Hasil Tambah Eksponen”** mengikut Akta Universiti Pertanian Malaysia (Ijazah lanjutan) 1980 dan Peraturan Universiti Pertanian Malaysia (Ijazah lanjutan) 1981. Jawatankuasa Pemeriksa tersebut telah memperakukan bahawa calon ini layak dianugerah ijazah berkenaan.

Ahli Jawatankuasa Pemeriksa adalah seperti berikut:

Noor Akma Ibrahim, PhD

Profesor Madya
Institut Penyelidikan Matematik
Universiti Putra Malaysia
(Pengerusi)

Mat Rofa Ismail, PhD


Profesor Madya
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Pemeriksa Dalam)

Nik Mohd Asri Nik Long, PhD

Pensyarah
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Pemeriksa Dalam)

Hj. Ismail Abdullah, PhD

Profesor Madya
Pusat Kemahiran Komunikasi dan Keusahawanan
Universiti Malaysia Perlis
(Pemeriksa Luar)


HASANAHT MOHD. GHAZALI, PhD
Profesor dan Timbalan Dekan
Sekolah Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh: 21 JUN 2007

Tesis ini telah dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia dan telah diterima sebagai memenuhi syarat keperluan untuk ijazah Master Sains. Ahli Jawatankuasa Penyelidikan adalah seperti berikut:

Dato' Kamel Ariffin Mohd Atan, PhD


Profesor
Institut Penyelidikan Matematik
Universiti Putra Malaysia
(Pengerusi)

Mohamad Rushdan Md. Said, PhD

Profesor Madya
Institut Penyelidikan Matematik
Universiti Putra Malaysia
(Ahli)

Bekbaev Ural Djumavich, PhD

Profesor Madya
Institut Penyelidikan Matematik
Universiti Putra Malaysia
(Ahli)



AINI IDERIS, PhD
Profesor dan Dekan
Sekolah Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh: 17 Julai 2007

PERAKUAN

Saya memperakui bahawa tesis ini adalah hasil kerja saya yang asli melainkan petikan dan sedutan yang tiap-tiap satunya telah dijelaskan sumbernya. Saya juga memperakui bahawa tesis ini tidak pernah dimajukan sebelum ini, dan tidak dimajukan serentak dengan ini, untuk ijazah lain sama ada di Universiti Putra Malaysia atau institusi lain.



NOR WAHIDA BINTI DERAMAN

Tarikh: 21 Mei 2007

JADUAL KANDUNGAN

	Muka Surat
DEDIKASI	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	vi
PENGHARGAAN	ix
PENGESAHAN	x
PERAKUAN	xii
SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN	xv
 BAB	
1 PENGENALAN	1
1.1 Ringkasan Penyelidikan	1
1.2 Sorotan Literatur	7
1.3 Kepentingan Kajian	13
1.4 Permasalahan	14
 2 PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN KONGRUEN LINEAR DENGAN BENTUK NORMAL SMITH	 15
2.1 Pengenalan	15
2.2 Bentuk Normal Smith	18
2.3 Kesimpulan	24
 3 SISTEM PERSAMAAN KONGRUEN LINEAR DUA PEMBOLEHUBAH	 25
3.1 Pengenalan	25
3.2 Penentuan Kekardinalan Set Penyelesaian Sepunya Kepada Persamaan Terbitan Separa bagi Polinomial Kuadratik Dua Pembolehubah, $f(x,y)$.	 47
 4 SISTEM PERSAMAAN KONGRUEN LINEAR TIGA PEMBOLEHUBAH	 50
4.1 Pengenalan	50
4.2 Penentuan Kekardinalan Set Penyelesaian Sepunya Kepada Persamaan Terbitan Separa bagi Polinomial Kuadratik Tiga Pembolehubah, $f(x,y,z)$.	 62

5	PENGANGGARAN KEKARDINALAN SET PENYELESAIAN SEPUNYA KEPADA SISTEM PERSAMAAN TERBITAN SEPARA BAGI POLINOMIAL KUADRATIK n-PEMBOLEHUBAH, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	66
5.1	Penentuan Kekardinalan Set Penyelesaian Sepunya Kepada Sistem Persamaan Terbitan Separa bagi Polinomial Kuadratik Empat Pembolehubah, $f(x, y, z, t)$	66
5.2	Penganggaran Kekardinalan Set Penyelesaian Sepunya Kepada Sistem Persamaan Terbitan Separa bagi Polinomial Kuadratik n -Pembolehubah, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	75
6	PENGANGGARAN HASIL TAMBAH EKSPONEN	77
6.1	Pengenalan	77
6.2	Hasil Tambah Eksponen	77
6.3	Penganggaran $ S(f; p^a) $ bagi polinomial kuadratik dua pembolehubah, $f(x, y)$	81
6.4	Penganggaran $ S(f; p^a) $ bagi polinomial kuadratik tiga pembolehubah, $f(x, y, z)$	83
6.5	Penganggaran $ S(f; p^a) $ bagi polinomial kuadratik empat pembolehubah, $f(x, y, z, t)$	85
7	KESIMPULAN DAN CADANGAN	87
7.1	Hasil Kajian	87
7.2	Kesimpulan	90
7.3	Cadangan	94
	BIBLIOGRAFI	95
	APENDIKS	98
	BIODATA PELAJAR	103

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

p	Nombor Perdana
Z	Gelanggang Integer
Q	Medan Nombor Nisbah
Z_p	Gelanggang Integer p -adic
Q_p	Medan Nombor Nisbah p -adic
\underline{x}	n -rangkap pembolehubah (x_1, x_2, \dots, x_n) , $n \geq 1$
f	m -rangkap polinomial (f_1, f_2, \dots, f_m) , $m \geq 1$
Σ	Hasil Tambah
$e_k(f(t))$	$e^{\frac{2\pi i f(t)}{k}}$
$S(f; q)$	Hasil Tambah Eksponen
$V(f; p^\alpha)$	Set $\{\underline{x} \bmod p^\alpha : f \equiv 0 \bmod p^\alpha\}$
$N(f; p^\alpha)$	Kekardinalan bagi Set $V(f; p^\alpha)$
$a b$	a Membahagi b
$ A $	Penentu atau bilangan unsur bagi Matriks A
A^T	Matriks Transposisi bagi Matriks A
mod	Modulo
diag	Pepenjuru (<i>diagonal</i>)
col	Lajur (<i>column</i>)
rank	Pangkat
gcd	Pembahagi Sepunya Terbesar
$\text{ord}_p a$	Kuasa tertinggi p yang membahagi a .

BAB 1

PENGENALAN

1.1: Ringkasan Penyelidikan

Penyelidikan kami ditumpukan kepada masalah menentukan kekardinalan sistem persamaan separa yang dihubungkan dengan $f(\underline{x})$, polinomial kuadratik n -pembolehubah, dengan $n = 2, 3$ dan 4 . Ini merupakan salah satu masalah yang telah dikaji oleh pengkaji-pengkaji terdahulu dalam usaha untuk mencari anggaran terbaik kepada kekardinalan ini, umpamanya Mohd. Atan (1989). Beliau telah menunjukkan bahawa, bagi sebarang polinomial kuadratik banyak pembolehubah, $f(\underline{x})$ dengan pekali dalam \mathbb{Z} , nilai $|S(f; p^\alpha)|$ bagi p perdana dan $\alpha > 0$ bergantung kepada $N(f; p^\theta)$ dengan $\theta = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$. Iaitu,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{n(\alpha-\theta)} N(f; p^\theta) \quad (1.1)$$

dengan $N(f; p^\theta)$ menandakan kekardinalan bagi $V(f; p^\theta)$. Katakan $\theta > 0$ dan $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, n -rangkap polinomial dalam gelanggang integer p -adic $\mathbb{Z}_p[\underline{x}]$ dengan $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kita pertimbangkan set

$$V(f; p^\theta) = \{ \underline{x} \bmod p^\theta; \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}) \equiv 0 \bmod p^\theta \}. \quad (1.2)$$

Kajian yang telah kami jalankan adalah dengan memerhatikan kekardinalan, $N(f; p^o)$ bagi sistem persamaan separa yang dihubungkan dengan polinomial kuadratik $f(x)$ dua, tiga dan empat pembolehubah.

Dalam Bab 2, kajian dimulakan dengan menyelesaikan sistem persamaan terbitan separa $f(x)$ dengan menggunakan kaedah penurunan matriks ke bentuk normal Smith. Penyelesaian diperolehi melalui perisian MAPLE9. Walaupun kaedah ini lebih mudah dan cepat, namun keputusan yang diperolehi kurang tepat dan penyelesaian bukan dalam bentuk (x_1, x_2, \dots, x_n) . Jadi, kajian diteruskan dengan menggunakan kaedah Cramer seperti yang diterangkan dalam Bab 3, Bab 4 dan Bab 5.

Dalam Bab 3, kajian dimulakan dengan polinomial kuadratik dua pembolehubah,

$$f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$$

dengan pekali di dalam set integer, Z . Kaedah yang digunakan adalah penyelesaian secara langsung menggunakan Petua Cramer. Seterusnya, kekardinalan bagi set $V(f_x, f_y; p^a)$ dapat ditentukan.

Dari polinomial $f(x,y)$ di atas, didapati fungsi terbitan separanya terhadap x dan y , yang ditandakan oleh f_x dan f_y adalah seperti berikut:

$$f_x(x,y) = 2ax + by + r$$

$$f_y(x,y) = bx + 2cy + s.$$

Katakan, m integer positif. Dari persamaan (1.2), sistem persamaan kongruen linear modulo m yang akan diteliti adalah berbentuk:

$$2ax + by + r \equiv 0 \pmod{m}$$

$$bx + 2cy + s \equiv 0 \pmod{m}.$$

Dalam Bab 4 pula, kajian diteruskan dengan polinomial kuadratik tiga pembolehubah,

$$f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yz+b_3xz+c_1x+c_2y+c_3z+d$$

dengan pekali dalam set integer, Z . Kaedah yang digunakan adalah sama seperti dalam bab sebelumnya dan kekardinalan bagi set $V(f_x, f_y, f_z; p^a)$ dapat ditentukan dengan fungsi terbitan separa $f(x,y,z)$ terhadap x , y dan z yang ditandakan f_x , f_y dan f_z adalah seperti berikut:

$$f_x(x, y, z) = 2a_1x + b_1y + b_3z + c_1$$

$$f_y(x, y, z) = 2a_2y + b_1x + b_2z + c_2$$

$$f_z(x, y, z) = 2a_3z + b_2y + b_3x + c_3.$$

Dari persamaan (1.2), sistem persamaan kongruen modulo m yang diteliti adalah berbentuk:

$$2a_1x + b_1y + b_3z + c_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_1x + 2a_2y + b_2z + c_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_3x + b_2y + 2a_3z + c_3 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Sementara itu dalam Bab 5 pula, bagi polinomial kuadratik empat pembolehubah yang dikaji berbentuk,

$$f(x,y,z,t) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz + b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e.$$

Dengan polinomial $f(x,y,z,t)$ ini, didapati fungsi terbitan separanya adalah seperti berikut:

$$f_x(x,y,z,t) = 2a_1x + b_1y + b_2z + b_3t + c_1$$

$$f_y(x,y,z,t) = 2a_2y + b_1x + b_4z + b_5t + c_2$$

$$f_z(x,y,z,t) = 2a_3z + b_2x + b_4y + b_6t + c_3$$

$$f_t(x,y,z,t) = 2a_4t + b_3x + b_5y + b_6z + c_4.$$

Sistem persamaan kongruen linear modulo m yang diteliti adalah terdiri daripada polinomial separa yang dikaitkan dengan persamaan $f(x,y,z,t)$, iaitu berbentuk:

$$2a_1x + b_1y + b_2z + b_3t + c_1 \equiv 0 \quad (\text{mod } m)$$

$$b_1x + 2a_2y + b_4z + b_5t + c_2 \equiv 0 \quad (\text{mod } m)$$

$$b_2x + b_4y + 2a_3z + b_6t + c_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } m)$$

$$b_3x + b_5y + b_6z + 2a_4t + c_4 \equiv 0 \quad (\text{mod } m).$$

Daripada penyelidikan kami, kekardinalan yang diperolehi dapat menganggar hasil tambah eksponen bagi polinomial-polinomial yang diperhatikan. Dalam kes polinomial kuadratik dua pembolehubah, biarkan p perdana, $\alpha > 0$ dan $\theta = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$. Maka, anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x, y)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{2(\alpha-\theta)+u_1}$$

dengan $u_1 = \min \{ord_p(4ac-b^2), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{ord_p 2a, ord_p b\}$ dan $k \leq \min\{ord_p b, ord_p 2c\}$.

Seterusnya, bagi polinomial kuadratik tiga pembolehubah yang dikaji, katakan p perdana, $\alpha > 0$ dan $\theta = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$. Maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x, y, z)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}$$

dengan, $(2a_1b_2 - b_1b_3) = a_{11}$, $(b_1b_2 - 2a_2b_3) = a_{12}$, $(2a_3b_1 - b_2b_3) = a_{21}$, $(4a_2a_3 - b_2^2) = a_{22}$, $u_2 \leq \min \{ord_p 2a_3, ord_p b_2, ord_p b_3\}$, $u_1 = \min\{ord_p (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{ord_p a_{11}, ord_p a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{ord_p a_{12}, ord_p a_{22}\}$. -

Manakala, bagi polinomial kuadratik empat pembolehubah pula, katakan p

perdana, $\alpha > 0$ dan $\theta = \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor$. Maka, anggaran hasil tambah eksponen bagi

$f(x, y, z, t)$ ialah,

$$|S(f; p^\alpha)| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}$$

dengan, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$,

$$(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}, \quad (2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}, \quad (b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23},$$

$$(2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31}, \quad (2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}, \quad (4a_3a_4 - b_6^2) = c_{33},$$

$$(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11}, \quad (c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}, \quad (c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21},$$

$$(c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}, \quad u_3 \leq \min\{\text{ord}_p 2a_4, \text{ord}_p b_3, \text{ord}_p b_5, \text{ord}_p b_6\}, \quad u_2 \leq$$

$\min\{\text{ord}_p c_{13}, \text{ord}_p c_{23}, \text{ord}_p c_{33}\}$ dan $u_1 = \min\{\text{ord}_p (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau

$u_1 = l + k$, dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p a_{11}, \text{ord}_p a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p a_{12}, \text{ord}_p a_{22}\}$.

1.2: Sorotan Literatur

Dalam Teori Nombor Analisis, ramai pengkaji telah memperihalkan peranan penting hasiltambah eksponen. Diantaranya ialah Davenport (1959), Igusa (1978) dan Schmidt (1982). Hasil tambah eksponen ditakrifkan sebagai

$$S(f, q) = \sum e_q(f(x))$$

dengan hasiltambah dinilai bagi x dalam set lengkap reja modulo q .

Hardy dan Littlewood (1919), Deligne (1974), Loxton dan Vaughan (1985) telah mengkaji hasil tambah $S(f; q)$ dengan f polinomial tak linear dalam \mathbb{Z} . Hasil tambah $S(f; q)$ dalam kes satu pembolehubah telah dikaji oleh Hardy dan Littlewood (1919) berhubung dengan masalah *Waring*.

Pada tahun 1940, Hua telah mendapati bahawa wujud $\epsilon > 0$, sedemikian hingga

$$|S(f; q)| \leq c p^{1 - \left(\frac{1}{m}\right) + \epsilon}$$

dengan c pemalar yang bersandar kepada m dan ϵ sahaja. Keputusan Hua telah diperbaiki oleh Jing-Run Chen (1977) yang menunjukkan bahawa jika kandungan bagi $f - f(0)$ perdana relatif terhadap q , maka

$$|S(f; q)| \leq e^{7(n+1)} q^{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Anggaran Hua telah digunakan oleh Stechkin (1980) bagi menunjukkan bahawa

$$|S(f; q)| \leq c^m q^{1-\frac{1}{m}} (c(f), q)^{\frac{1}{m}}$$

untuk suatu pemalar mutlak positif c tertentu, dengan $c(f)$ menandakan kandungan bagi $f - f(0)$. Pada tahun 1974 pula, Deligne menunjukkan bahawa untuk suatu nombor perdana p ,

$$|S(f; q)| \leq (m-1)^n p^{\frac{n}{2}}$$

dengan m adalah jumlah darjah bagi suatu polinomial f , apabila bahagian homogen bagi f berdarjah terbesar adalah tak singular modulo p . Kajian Deligne ini membuka jalan bagi mendapat anggaran yang lebih tepat bagi $|S(f; q)|$ untuk polinomial am f dalam beberapa pembolehubah.

Seterusnya pada tahun 1962 pula, poligon Newton telah digunakan oleh Walker dalam pembuktian Teorem Puiseux. Manakala pada tahun 1983, Sathaye juga telah mempertimbangkan perluasan kaedah Newton-Puiseux secara umum.

Pada tahun 1977, Koblitz membincangkan kaedah poligon Newton dalam kes p -adic bagi polinomial dan siri kuasa di dalam $\Omega_p[x]$. Penganggaran pensifar bagi polinomial tersebut dihasilkan daripada sifat-sifat poligon Newton yang berkaitan. Khususnya, jika λ kecerunan suatu tembereng pada

poligon Newton bagi suatu polinomial f dengan panjangnya N , maka terdapat N pensifar bagi f yang peringkat p -adicnya $-\lambda$.

Untuk setiap nombor perdana p , katakan $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ n -rangkap polinomial dalam gelanggang p -adic $Z_p[x]$ dengan $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Kita pertimbangkan set $V(\underline{f}; p^\alpha) = \{ \underline{u} \bmod p^\alpha : \underline{f}(\underline{u}) \equiv 0 \bmod p^\alpha \}$ dan tandaan $N(\underline{f}; p^\alpha)$ adalah kekardinalan bagi $V(\underline{f}; p^\alpha)$ dengan $\alpha > 0$ dan \underline{u} mengambil nilai bagi set lengkap reja modulo p^α .

Pada tahun 1982, Loxton dan Smith telah menyelidiki penggunaan teknik poligon Newton dan akhirnya menggunakan kaedah tersebut untuk mendapatkan keputusan mereka, seperti di bawah.

Katakan, K medan nombor aljabar yang diterbitkan daripada punca-punca $\xi_i, 1 \leq i \leq m$ bagi polinomial-polinomial $f(x)$ dalam $Z[x]$, Loxton dan Smith telah menunjukkan bahawa

$$N(f; p^\alpha) \leq mp^{\alpha - \frac{(\alpha - \delta)}{e}},$$

jika $\alpha > \delta$, dengan m adalah bilangan pensifar berbeza bagi $f(x)$ dan $\delta = \text{ord}_p D(f)$, $D(f)$ menandakan persilangan bagi fungsian utama \bar{K} yang diterbitkan daripada $\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!}, i > 1$, dengan e_i gandaan pensifar ξ_i .